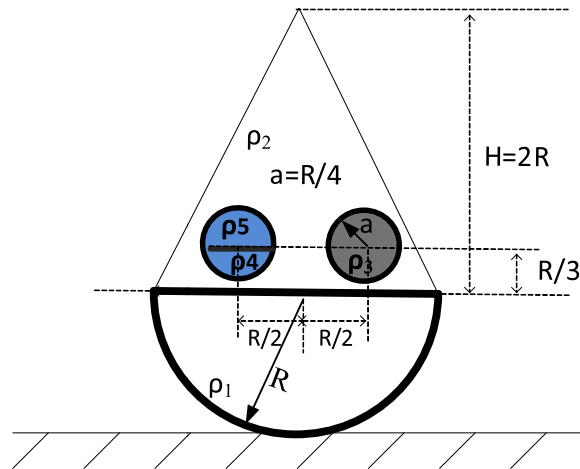


## MEHANIKA

1. Polovina kugle poluprečnika  $R$  i gustine  $\rho_1$  leži na horizontalnom stolu. Na nju je postavljen konus  $H=2R$  i gustine  $\rho_2=\rho_1/6$  u kome su dve unutrašnje loptaste šupljine poluprečnika  $a=R/4$  koja su pozicionirane simetrično kao na slici. Prva šupljina je ispunjena sa materijalom gustine  $\rho_3=\rho_1/25$ . Druga šupljine je ispunjena pola sa  $\rho_4=\rho_1$ , a pola sa  $\rho_5=2\rho_1$ . Ako se smatra da su sve veličine poznate, ispitati stabilnost ravnoteže i odrediti ugao nagiba celog tela.

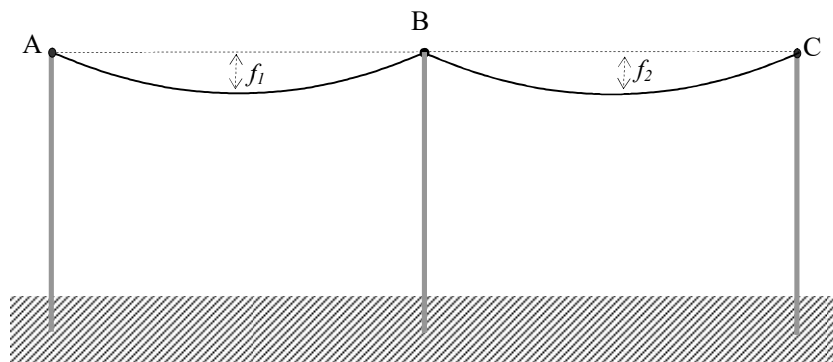


2. Analiziraju se dva identična raspona,  $AB=BC=200$  m, koji su realizovani sa homogenim čeličnim užetom i identičnim vertikalnim armirano-betonskim valjkastim stubovima, svaki mase  $1000$  kg, visine  $H=10$  m iznad zemlje. Prečnik stuba je  $31$  cm. Uže je pričvršćeno za vrhove stubova u tačkama A, B i C, koje se nalaze na horizontalnom pravcu, kao na slici. Temelji stubova se mogu tretirati kao idealna uklještenja. Uže je zategnuto tako da su, pri temperaturi  $t_m=20^{\circ}\text{C}$  bez dodatnog opterećenja, maksimalni ugibi užeta  $f_{1m}=f_{2m}=4$  m.

Pri temperaturi užeta  $t_1=0^{\circ}\text{C}$  dalekovod je opterećen silom pritiska vetra koji duva brzinom  $V=30$  m/s normalno na liniju trase voda. Gustina vazduha je  $1,2$  kg/m<sup>3</sup>. Aerodinamički koeficijenti za stub i uže su  $C_s=C_u=C=1$ . Proračunati:

- Najmanje rastojanje užeta od zemlje pri analiziranom stanju i proveriti da li je uže mehanički preopterećeno.
- Mehaničke reakcije veza u temeljima sva tri stuba pri opisanom stanju.

Parametri užeta su:  $\sigma_u = 2 \cdot 10^8$  Pa;  $A = 100$  mm<sup>2</sup>;  $\gamma = 7,8 \cdot 10^4$  N/m<sup>3</sup>;  $E = 21 \cdot 10^{10}$  Pa;  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>.



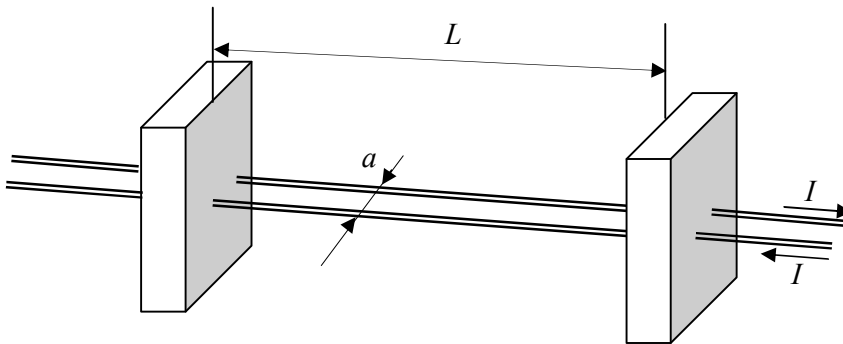
3. Kroz dva paralelna aluminijumska provodnika teče struja kao što je prikazano na slici. Provodnici su izvedeni u obliku cevi unutrašnjeg prečnika 55 mm i spoljašnjeg 60 mm. Cevi su postavljene u horizontalnoj ravni na rastojanju  $a=1$  m (rastojanje između aksijalnih osa cevi). Rastojanje između paralelnih vertikalnih zidova kroz koje cevi prolaze je  $L=10$  m. Zidove tretirati kao idealna uklještenja za cevi. Izračunati:

- Mehaničko naprezanje u cevima kada kroz njih ne teče struja.
- Maksimalnu vrednost struje  $I_{max}$  tako da cevi nisu mehanički preopterećene.
- Minimalno rastojanje između aksijalnih osa cevi ako kroz njih protiče struja  $I_{max}$  (proračunata u tački b).

Podužna magnetska sila koja djeluje na provodnike se može sračunati prema sledećoj aproksimativnoj

formuli:  $F = \frac{2I^2}{a} 10^{-7}$  [N/m],  $I$ [A].  $a$ [m].

Podaci za aluminijum:  $\gamma=2,8 \cdot 10^4$  N/m<sup>3</sup>,  $E=7 \cdot 10^{10}$  Pa,  $\sigma_d=7 \cdot 10^7$  Pa.



**Napomena:** Ispit traje maksimalno 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum rade zadatak 3 i jedan od preostala dva zadatka po izboru. Ostali studenti rade sve zadatke.

**MEHANIKA**  
**Rešenja zadataka**

1.

$$\text{kupa: } m_2 = \rho_2 \frac{R^2 \pi H}{3} = \rho_2 \frac{128a^3 \pi}{3} = 42,67 \rho_2 a^3 \pi (5 \text{ poena})$$

$$\text{polulopta: } m_1 = \rho_1 \frac{1}{2} \frac{4R^3 \pi}{3} = 6 \rho_2 \frac{128a^3 \pi}{3} = 256 \rho_2 a^3 \pi (5)$$

$$\text{lopta: } m_3 = (\rho_3 - \rho_2) \frac{4a^3 \pi}{3} = -1,0137 \rho_2 a^3 \pi (5)$$

$$x_{c1} = 0; y_{c1} = -\frac{3}{8} R = -\frac{3a}{2} (5)$$

$$x_{c2} = 0; y_{c2} = \frac{H}{4} = 2a (5)$$

$$x_{c3} = \frac{R}{2} = 2a; y_{c3} = \frac{R}{3} = \frac{4a}{3} (5)$$

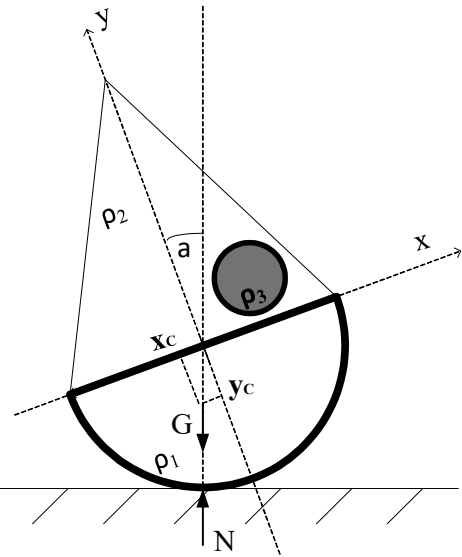
$$x_c = \frac{m_1 x_{c1} + m_2 x_{c2} + m_3 x_{c3}}{m_1 + m_2 + m_3} = -0,0067a = -0,0017R (20)$$

$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2} + m_3 y_{c3}}{m_1 + m_2 + m_3} = -1,008a = -0,252R (20)$$

$y_c < 0 \rightarrow$  stabi ln a – ravnoteza

$$\alpha = \arctan\left(\frac{0,0067a}{1,008a}\right) = 0,3865^\circ (20)$$

Slika (10 poena)



2.

a) Proračun ugiba užeta u rasponu BC pri temperaturi  $t_2 = -5^\circ\text{C}$  bez dodatnog opterećenja se može izvršiti direktnom primjenom jednačine stanja.

Referentno stanje:

$$t_0 = t_m = 20^\circ\text{C},$$

$$\sigma_0 = \frac{\gamma l^2}{2f_m} = \frac{7,8 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 4} = 9,75 \cdot 10^7 \text{ Pa.}$$

Jednačina stanja:

$$f^3 - f \frac{3}{2} l^2 \left[ \frac{\gamma^2 l^2}{6\sigma_0^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{\sigma_0}{E} \right] - \frac{3}{4} \frac{\gamma l^4}{E} = 0$$

Za  $t = t_2 = 0^\circ\text{C}$  dobija se:

$$f^3 - 5,44f - 27,87 = 0$$

$$f_2 = 3,62 \text{ m.}$$

$$f_2 < 0, l = 10 \text{ m} \Rightarrow \text{plitka lančanica.}$$

Pošto su rasponi identični i imaju isto referentno stanje važi da je  $f_1 = f_2$  pri temperaturi  $t = 0^\circ\text{C}$  bez dodatnog opterećenja.

Proračun ugiba užeta pri temperaturi  $t_2=0^0\text{C}$  uz dodatno opterećenje:

Dužina nezategnutog užeta u jednom rasonu pri temperaturi  $t_1=0^0\text{C}$  :

$$f^3 - f(2L_0 - 2l) \frac{3}{4} l - \frac{3}{4} \frac{\gamma l^4}{E} = 0$$
$$2L_0 = 2l + \frac{4}{3} \frac{f^2}{l} - \frac{\gamma l^3}{f \cdot E} = 200 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3,62^2}{100} - \frac{7,8 \cdot 10^4 \cdot 100^3}{3,62 \cdot 21 \cdot 10^{10}} = 200,072 \text{ m}.$$

Proračun podužne sile pritiska vetra na provodnik:

$$q_v = 0,5 \cdot c \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = 0,5 \cdot 1 \cdot 1,2 \cdot 30^2 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 6,09 \text{ N/m}.$$

Proračun podužne težine provodnika:

$$q = \gamma A = 7,8 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 7,8 \text{ N/m}.$$

Proračun ekvivalentne specifične težine provodnika uz pritisak vetra:

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{q^2 + q_v^2}}{A} = \frac{\sqrt{7,8^2 + 6,09^2}}{100 \cdot 10^{-6}} = 9,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3.$$

Proračun ugla ravni lančanice u uslovima postojanja sila pritiska vetra:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{q_v}{q}\right) = \arctg\left(\frac{6,09}{7,80}\right) = 38^0.$$

Proračun ugiba lančanice u opisanim uslovima vetra:

$$f'^3 - f'(2L'_0 - 2l') \frac{3}{4} l' - \frac{3}{4} \frac{\gamma_e l'^4}{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'^3 - 5,4 f' - 35,36 = 0 \quad \Rightarrow \quad f' = 3,82 \text{ m}$$

Proračun horizontalne komponente naprezanja u užetu u uslovima dejstva sile pritiska vetra:

$$\sigma' = \frac{\gamma_e l'^2}{2 f'} = \frac{9,9 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 3,82} = 1,294 \cdot 10^8 \text{ Pa}; \quad \sigma' < \sigma_d.$$

Uže nije mehanički pereopterećeno.

Proračun minimalnog rastojanja između užeta i zemlje pri dejstvu sile pritiska vetra:

$$d = H - f' \cos \alpha = 10 - 3,82 \cdot \cos(32^0) = 6,99 \text{ m}.$$

b) Da bi se proračunale reakcije u temeljima stubova potrebno je proračunati sile koje deluju na stubove. Pored sopstvenih težina stubova, na njih deluje i sila pritiska vetra (koja je ravnomerno raspoređena duž visine stuba) i koncentrisane sile na vrhovima stubova koje potiču od sile zatezanja u užetu.

Proračun sile pritiska vetra na stub:

$$F_{vs} = \frac{1}{2} C_s \rho d H v^2 = 0,5 \cdot 1 \cdot 1,2 \cdot 0,31 \cdot 10 \cdot 30^2 = 1,674 \text{ kN}$$

Silu zatezanja u tački vešanja užeta možemo razložiti na horizontalnu i vertikalnu komponentu. Horizontalna komponenta ima projekcije u pravcu trase voda, koja predstavlja horizontalnu komponentu sile zatezanja užeta, i komponentu u smeru duvanja vetra koja je posledica sile pritiska vetra na provodnik. Vertikalna komponenta deluje u pravcu aksijalne ose stuba i ona je posledica težine užeta:

$$H_x = \sigma \cdot A = 1,294 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 12,94 \text{ kN}$$

$$H_y = q_v \cdot l = 6,09 \cdot 100 = 0,609 \text{ kN}$$

$$V = \gamma A l = 7,8 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0,78 \text{ kN}$$

Statički uslovi ravnoteže stubova:

Proračun reakcija u temeljima stubova (x osa je u pravcu trase voda, y osa u pravcu smeru duvanja vetra, a z osa je aksijalna osa stuba):

$$R_{Ax} = H_x = 12,940 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} = H_y + F_{Vs} = 2,283 \text{ kN}$$

$$R_{Az} = V + Q_s = V + m_s g = 10,590 \text{ kN}$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 16,876 \text{ kN}$$

$$M_{Ax} = H_y h + F_{Vs} \frac{h}{2} = 14,46 \text{ kNm}$$

$$M_{Ay} = H_x h = 129,40 \text{ kNm}$$

$$M_{Az} = 0$$

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = 130,30 \text{ kNm}$$

$$R_{Bx} = 0$$

$$R_{By} = 2H_y + F_{Vs} = 2,892 \text{ kN}$$

$$R_{Bz} = 2V + Q_s = 2V + m_s g = 11,370 \text{ kN}$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = 11,732 \text{ kN}$$

$$M_{Bx} = 2 \cdot H_y h + F_{Vs} \frac{h}{2} = 20,55 \text{ kNm}$$

$$M_{By} = 0$$

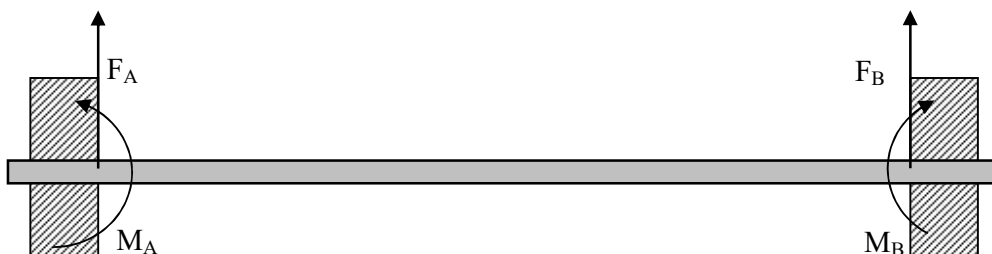
$$M_{Bz} = 0$$

$$M_B = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{By}^2 + M_{Bz}^2} = 20,55 \text{ kNm}$$

Na osnovu simetrije može se zaključiti da važi:  $R_C = R_A$ ,  $M_C = M_A$ .

### 3.

Provodnici se mogu posmatrati kao grede koje su uklještene na oba kraja i ravnomerno opterećene teretom koji potiče od sopstvene težine i elektromagnetske sile usled proticanja struje.



#### a)

Podužna težina grede je:

$$q_0 = \gamma A = \gamma \frac{D^2 \pi}{4} (1 - \psi^2) = 12,639 \text{ N/m};$$

Statički uslovi ravnoteže grede:

$$F_A + F_B = q_e L$$

$$\sum M_A = F_B L - q_e \frac{L^2}{2} + M_A - M_B = 0$$

Na osnovu simetrije i definisanih statičkih usova može se zaključiti da je:

$$F_A = F_B = \frac{q_e L}{2} = 63,2 \text{ N}$$

$$M_A = M_B$$

Sistem je statički neodređen, potrebno je analizirati deformaciju grede.

$$Bu'' = -M(z) = -F_A z + M_A + \frac{q_0 z^2}{2}$$

$$Bu' = -F_A \frac{z^2}{2} + M_A z + \frac{q_0 z^3}{6} + C_1$$

$$Bu = -F_A \frac{z^3}{6} + M_A \frac{z^2}{2} + \frac{q_0 z^4}{24} + C_1 z + C_2$$

$$u(0) = u(L) = 0; \quad u'(0) = u'(L) = u'(\frac{L}{2}) = 0; \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad -F_A \frac{L}{3} + M_A + \frac{q_0 L^2}{12} = 0.$$

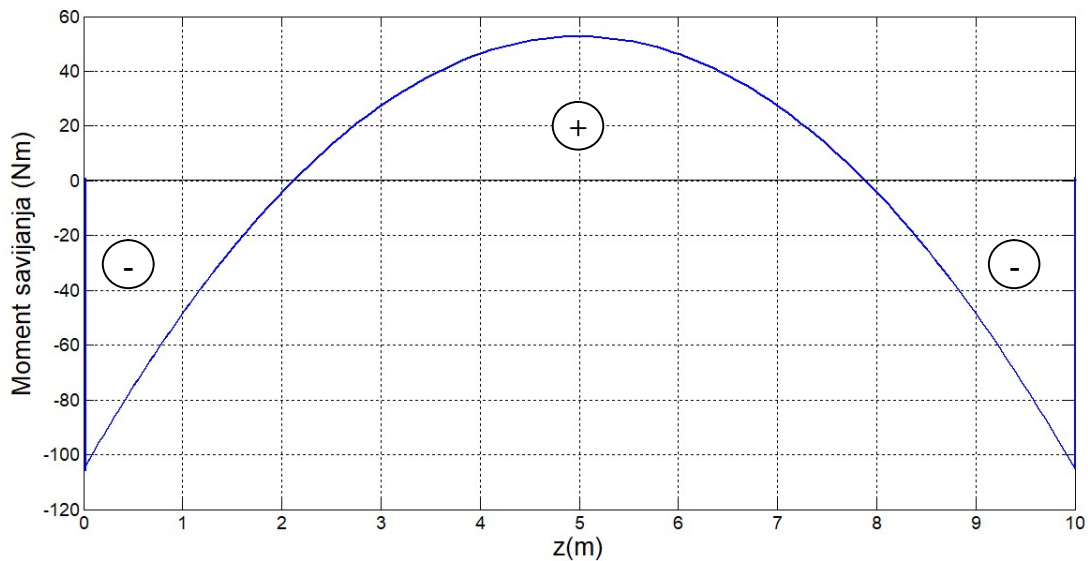
Uvažavajući statičke uslove ravnoteže i definisane granične uslove, mogu se proračunati momenti reakcije u uklještenjima grede:

$$M_A = M_B = \frac{q_0 L^2}{12} = 105,32 \text{ Nm}$$

Promena momenta savijanja duž analizirane grede je definisana jednačinom:

$$M(z) = F_A z - M_A - \frac{q_0 z^2}{2}$$

Dijagram momenata savijanja:



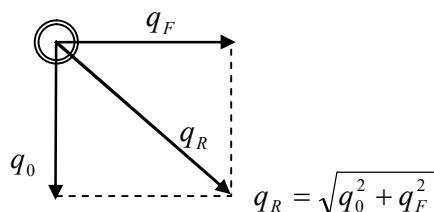
Maksimalni moment savijanja se javlja u uklještenjima grede:

$$M_{\max} \equiv |M(z)|_{\max} = |M_A| = |M_B| = \frac{q_0 L^2}{12} = 105,32 \text{ Nm}.$$

Maksimalno naprezanje je:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_A}{W}; \quad W = \frac{\pi D^3}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) = 6,23 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \quad \sigma_{\max} = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

b) Kada kroz provodnike protiče struja, na njih djeluje elektromagnetska sila koja, za zadate smjerove struja, teži da ih odbije. Dakle, elektromagnetska sila djeluje u horizontalnoj ravni, pa je rezultantna podužna sila:



Momentna jednačina i jednačina elastične linije imaju istu matematičku formu kao i u slučaju greda koje nisu strujno opterećene, samo se deformacije dešavaju u ravni koja je definisan pravcem rezultantne sile.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{q_R L^2}{12W} \leq \sigma_d \quad \Rightarrow \quad q_{R\max} = \frac{12W \sigma_d}{L^2} = 52,33 \text{ N/m}$$

$$q_{F \max} = \sqrt{q_R^2 - q_0^2} = 50,78 \text{ N/m} \quad q_F = \frac{2I^2}{a} \cdot 10^{-7} (\text{N/m}) \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{q_{F \max} \cdot a}{2 \cdot 10^{-7}}} = 15,934 \text{ kA}$$

c) Jednačina elastične linije je:

$$u(z) = \frac{1}{B} \left( -F_A \frac{z^3}{6} + M_A \frac{z^2}{2} + \frac{q_0 z^4}{24} \right)$$

$$B = EI_x = E \frac{\pi D^4}{64} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) = 1,3089 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$$

Maksimalni ugib:

$$\frac{du}{dz} = -F_A \frac{z^2}{2} + M_A z + \frac{q_0 z^3}{6} = 0 \Rightarrow \left( -F_A \frac{z}{2} + M_A + \frac{q_0 z^2}{6} \right) \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0 \vee z = L \vee z = \frac{L}{2}$$

Na mestima  $z=0$  i  $z=L$  ima se minimalni ugib grede.  $u=0$ . Na mestu  $z=L/2$  ima se maksimalni ugib grede, koji iznosi:

$$u_{\max} = u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_R L^4}{384B} = 0,104 \text{ m.}$$

Minimalno rastojanje između osa grede je na mjestima uklještenja i ono iznosi  $x_{\min}=a=1\text{m}$ , Maksimalno rastojanje između osa greda je na sredini raspona i ono iznosi:

$$x_{\min} = a + 2u_{\max} \sin(\alpha) = a + 2 \frac{q_R L^4}{384B} \cdot \frac{q_F}{q_R} = a + 2 \frac{q_F L^4}{384B} = 1 + 2 \cdot 0,101 = 1,202 \text{ m.}$$